Aufnahmeprüfung 2013

Mathematik Teil I – Lösungen

1. a) Mit der binom'schen Formel:

$$(1-x)^3 = \binom{3}{0}1^3x^0 - \binom{3}{1}1^{3-1}x^1 + \binom{3}{2}1^{3-2}x^2 - \binom{3}{3}1^{3-3}x^3 = 1 - 3x + 3x^2 - x^3$$

b) Mit den Potenzgesetzen:

$$\left(\left(4a^2\right)^{-2}\left(2a^0\right)^3\right)^{-1} = 4^{-2\cdot -1}a^{2\cdot -2\cdot -1}2^{3\cdot -1}a^{0\cdot 3\cdot -1} = 4^2a^42^{-3}a^0 = 2a^4$$

c) Brüche und Potenzgesetze:

$$\frac{3^n\left(\frac{1}{3}3^n - 3^{n-2}\right)}{3^{2n}} = \frac{3^n3^n\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{9}\right)}{3^{2n}} = \frac{1}{3} - \frac{1}{9} = \frac{2}{9}$$

d) Brüche, Potenz- und Wurzelgesetze:

$$\frac{\left(a^{-3}b\right)^{-2}}{\sqrt{ab^3}} \div \frac{\sqrt[3]{ab}}{\sqrt[6]{a^5b^5}} = \left(a^{6-\frac{1}{2}}b^{-2-\frac{3}{2}}\right) \div \left(a^{\frac{1}{3}-\frac{5}{6}}b^{\frac{1}{3}-\frac{5}{6}}\right) = a^{\frac{11}{2}}b^{-\frac{7}{2}}a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{12}{2}}b^{-\frac{6}{2}} = \frac{a^6}{b^3}$$

e) Formel beschreibt einen Basiswechsel:

$$\frac{\log_2(512)}{\log_2(8)} = \log_8(512)$$

f) Trigonometrische Umformungen:

$$\sqrt{1+\tan^2(\alpha)} = \sqrt{1+\frac{\sin^2(\alpha)}{\cos^2(\alpha)}} = \frac{\sqrt{\cos^2(\alpha)+\sin^2(\alpha)}}{\cos(\alpha)} = \frac{1}{\cos(\alpha)}$$

2. a) Doppelbrüche:

$$\begin{aligned} T(x) &= \frac{1}{x-\frac{6}{x-1}} - \frac{1}{x-\frac{2}{x+1}} = \frac{1}{\frac{x(x-1)}{x-1}-\frac{6}{x-1}} - \frac{1}{\frac{x(x+1)}{x+1}-\frac{2}{x+1}} = \frac{1}{\frac{x^2-x-6}{x-1}} - \frac{1}{\frac{x^2+x-2}{x+1}} = \frac{x-1}{x^2-x-6} - \frac{x+1}{x^2+x-2} \\ &= \frac{x-1}{(x-3)(x+2)} - \frac{x+1}{(x-1)(x+2)} = \frac{(x-1)^2-(x+1)(x-3)}{(x+2)(x-1)(x-3)} = \frac{4}{(x+2)(x-1)(x-3)} \end{aligned}$$

b) Z.B. mit einer Vorzeichentabelle:

		-2		1		3		x
$(x+2)$	$- - -$	0	$+ + + + +$	$+$	$+ + + +$	$+$	$+ + +$	
$(x-1)$	$- - -$	$-$	$- - - -$	0	$+ + + +$	$+$	$+ ++$	
$(x-3)$	$- - -$	$-$	$- - - - -$	$-$	$- - -$	0	$+ ++$	
Term	$- - -$	x	$+ + + +$	x	$- -$	x	$+ ++$	

$$\Rightarrow\ x \in (-2, \infty) \setminus [1, 3]$$

3. a) Der Definitionsbereich wird durch die Wurzeln bestimmt:

$$2x+1 \geq 0 \;\Rightarrow\; x \geq -\frac{1}{2} \;\Rightarrow\; D_1 = [\,-\frac{1}{2}, \infty\,)$$

$$4-x \geq 0 \;\Rightarrow\; x \leq 4 \;\Rightarrow\; D_2 = (\,-\infty, 4\,]$$

$$\Rightarrow\; DB = D_1 \cap D_2 = \left[-\frac{1}{2}, 4\right]$$

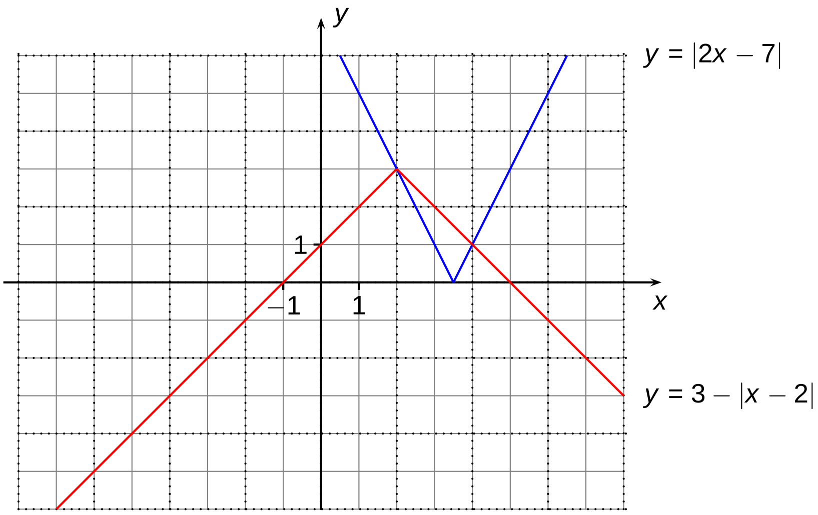
b)

$$\begin{aligned} \sqrt{2x+1} &= 1+\sqrt{4-x} \\ 2x+1 &= 1+2\sqrt{4-x}+4-x \\ 3x-4 &= 2\sqrt{4-x} \\ 9x^2-24x+16 &= 16-4x \\ 9x^2-20x &= 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow\; x_1 = 0,\; x_2 = \frac{20}{9}$$

Beide Lösungen befinden sich im Definitionsbereich der Gleichung. Die Kontrolle zeigt, dass $x_1 = 0$ ($\sqrt{1} = 1+\sqrt{4}$) eine Scheinlösung ist. Die Lösungsmenge lautet somit: $L = \left\{\frac{20}{9}\right\}$.

4. a) Skizze:



b) Fallunterscheidung:

- Fall 1: $2x-7 \geq 0 \;\Rightarrow\; D_1 = [3.5, \infty)$:
  $$2x-7 = 3-|x-2|$$
  - Fall 1A: $x-2 \geq 0 \;\Rightarrow\; D_{1A} = [3.5, \infty)$:
    $$2x-7 = 3-x+2 \;\Rightarrow\; x_{1A} = 4$$
  - Fall 1B: $x-2 < 0 \;\Rightarrow\; D_{1B} = \{\}$: Keine Lösung!
- Fall 2: $2x-7 < 0 \;\Rightarrow\; D_2 = (-\infty, 3.5)$:
  $$-2x+7 = 3-|x-2|$$
  - Fall 2A: $x-2 \geq 0 \;\Rightarrow\; D_{2A} = [2, 3.5)$:
    $$-2x+7 = 3-x+2 \;\Rightarrow\; x_{2A} = 2$$

– Fall 2B: $x-2<0 \Rightarrow D_{1B} = (-\infty, 2)$:

$$-2x+7 = 3+x-2 \Rightarrow x_{2B} = 2$$

Liegt nicht im entsprechenden Definitionsbereich!

Somit hat die Gleichung die Lösungsmenge $L = \{2, 4\}$

5. a) Mit $a = 64$ und $a^p = 512$ folgt $64^p = 512 \Rightarrow p = \frac{\log_2(512)}{\log_2(64)} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$. Mit $a = 64$ und $a^q = 256$ folgt $64^q = 256 \Rightarrow q = \frac{\log_2(256)}{\log_2(64)} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$.

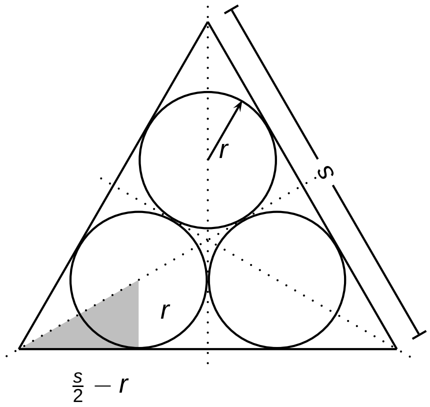
   b) Es gilt: $16 = (x^p)^q = x^{pq} = x^2$. Nach x auflösen: $x = \sqrt{16} = 4$.

6. a) Im markierten Dreieck gilt:

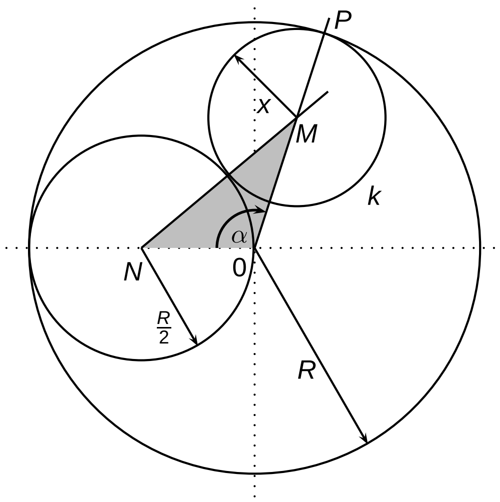
$$\tan(30^\circ) = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{r}{\frac{s}{2}-r}$$

Nach dem gesuchten Radius auflösen:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{3}} &= \frac{r}{\frac{s}{2}-r} \\ \frac{s}{2}-r &= \sqrt{3}r \\ \frac{s}{2} &= r\left(1+\sqrt{3}\right) \\ \Rightarrow r = \frac{s}{2\left(1+\sqrt{3}\right)} &= \frac{s\left(\sqrt{3}-1\right)}{4} \end{aligned}$$



   b) Skizze:



Im markierten Dreieck liefert der Kosinussatz die Gleichung:

$$\left(\frac{R}{2}+x\right)^2 = \left(\frac{R}{2}\right)^2 + (R-x)^2 - 2\frac{R}{2}(R-x)\cos(\alpha)$$

Nach dem gesuchten Radius auflösen:

$$\begin{aligned}\left(\frac{R}{2}+x\right)^2 &= \left(\frac{R}{2}\right)^2+(R-x)^2-2\frac{R}{2}(R-x)\cos(\alpha)\\ \frac{R^2}{4}+Rx+x^2 &= \frac{R^2}{4}+R^2-2Rx+x^2-R(R-x)\cos(\alpha)\\ x(3R-R\cos(\alpha)) &= R^2(1-\cos(\alpha))\end{aligned}$$

$$\Rightarrow\ x=R\frac{1-\cos(\alpha)}{3-\cos(\alpha)}$$

7. a) $\left|\vec{AB}\right| = \left|\vec{r_B}-\vec{r_A}\right| = \left|\begin{pmatrix}3\\12\\-4\end{pmatrix}\right| = \sqrt{3^2+12^2+(-4)^2} = 13$

b) $\vec{s_A}=\vec{AM_a}=\vec{r_{M_a}}-\vec{r_A}=\frac{1}{2}\left(\vec{r_B}+\vec{r_C}\right)-\vec{r_A}=\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\\frac{13}{2}\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

c) $\vec{AB}\circ\vec{AC}=\begin{pmatrix}3\\12\\-4\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}=0+12-12=0$

8. a) $\tan(\alpha)=\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}=\frac{\sin(\alpha)}{-\sqrt{1-\sin^2(\alpha)}}=\frac{\frac{2}{3}}{-\sqrt{1-\left(\frac{2}{3}\right)^2}}=-\frac{2}{\sqrt{5}}=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$

b) Ein Produkt ist gleich Null, wenn die einzelnen Faktoren Null sind!

- Erster Faktor:

$$\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)=0\ \Rightarrow\ x_1=k\pi+\frac{\pi}{3},\ k\in\mathbb{Z}$$

- Zweiter Faktor:

$$(\sin(2\alpha)-1)=0\ \Rightarrow\ x_2=\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}$$

Die gesuchte Lösungsmenge lautet somit:

$$\Rightarrow\ L=\left\{\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{4},\frac{4\pi}{3}\right\}$$